

2011年国家队选拔赛 第二试

无穷图的桥

北京大学哲学系 曹钦翔

无穷图的桥

- 分数分布：
 - 30分：蒋中天、闫学灿
 - 20分：周奕超等20人
 - 10分若干……

无穷图的桥

- 问题类型
 - 传统型
- 问题简述
 - 对于一个分层的点数无穷的无向连通图中，求所有桥的权值之和。

无穷图的桥

- 问题描述

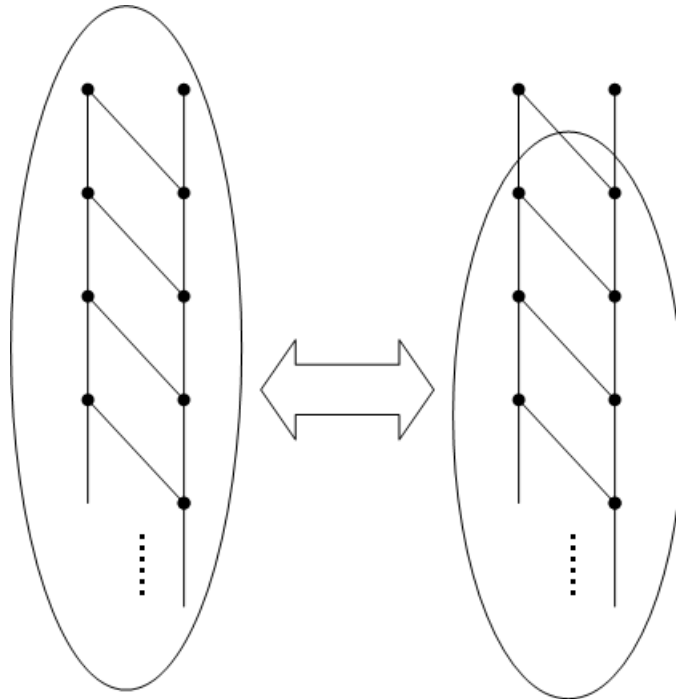
- 求一个具有下面性质的无向连通图中所有桥的权值之和
 - 所有的点分成无穷多层，分别是第1层、第2层...
 - 每层中有 n 个点
 - 只有同一层内的点之间或者相邻两层的点之间可能有边相连
 - 各层内的连边方式相同
 - 各相邻层间的连边方式相同
 - 边权按几何级数递减

无穷图的桥

- 示例

无穷图的桥

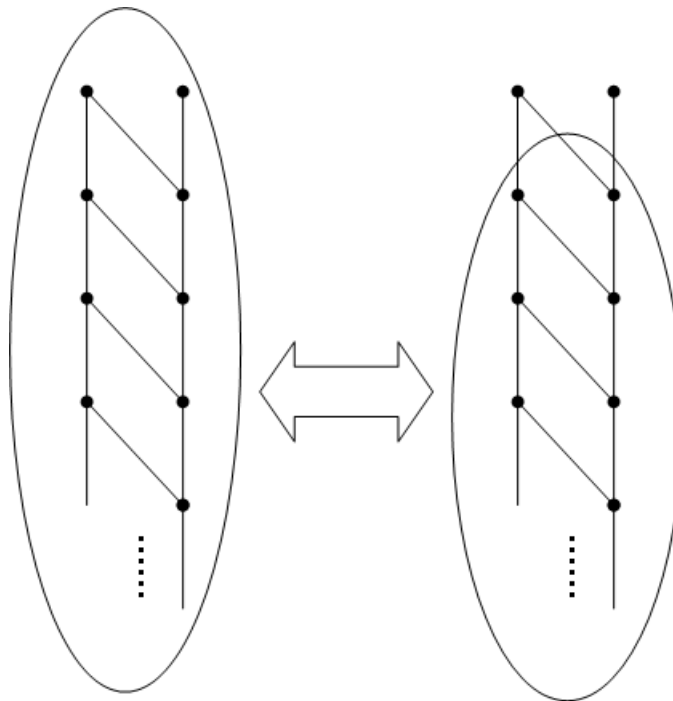
- 问题分析
 - 除去前 s 层的之后的子图与原图同构



无穷图的桥

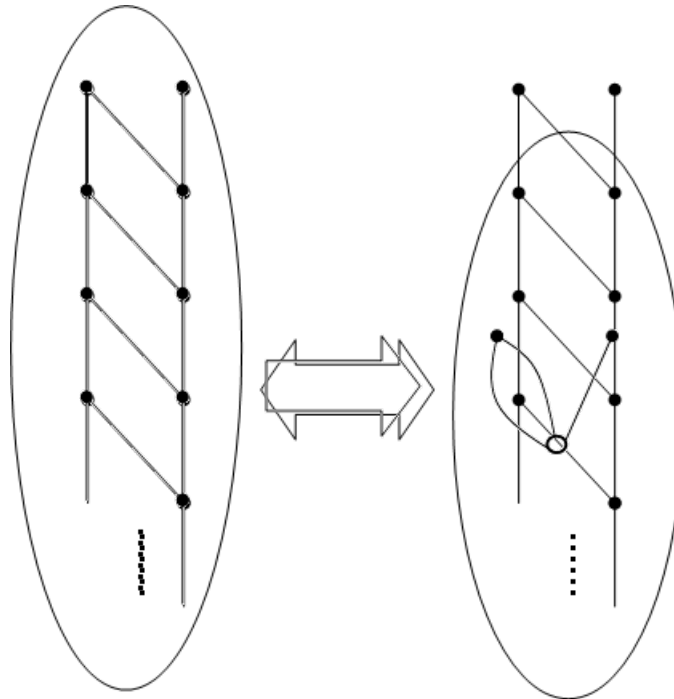
- 问题分析

- 因为原图是连通图，所以除去前 s 层后的子图是连通子图



无穷图的桥

- 问题分析
 - 可以缩点以求出所有前 s 层中的桥



无穷图的桥

- 算法与得分

- 算法一：选择一个充分大的 s ，对前 s 层求桥（预计得分30分）
- 算法二：先层内预处理，再对前 s 层求桥（预计得分70分）
- 算法三：用并查集滚动维护连通性（预计得分100分）

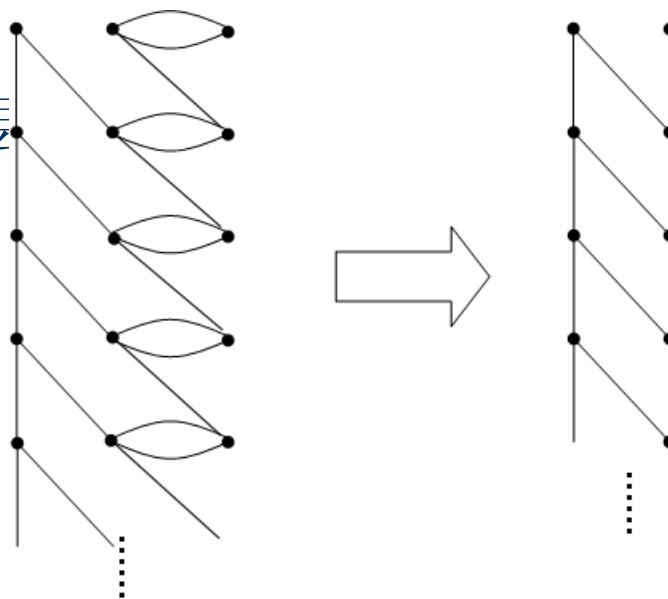
无穷图的桥

- 算法一：
 - 选择一个充分大的 s
 - 将第 $s+1$ 层以后的部分缩为一个点后求桥
 - 一条边只要在第 s 层中是桥，就认为永远是桥
 - s 的选择：在不超时、不超空间的前提下尽可能大
 - 时间复杂度： $O((n+m_1+m_2)s)$

无穷图的桥

- 算法二：

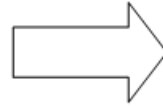
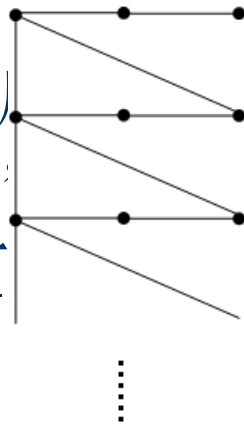
- 先将每一层



无穷图的桥

- 算法二：

- 先将每一
- 再“删去”
邻的节点



的且只与层内点相

无穷图的桥

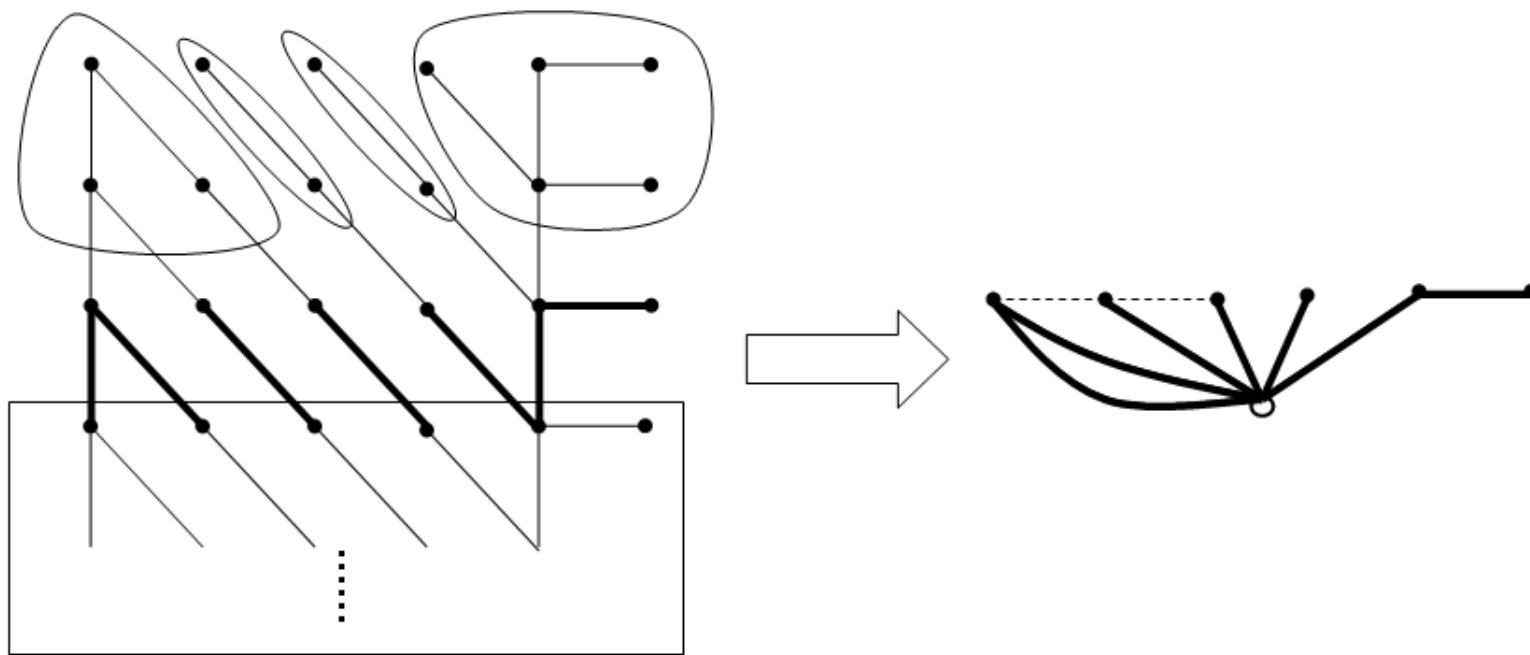
- 算法二：
 - 先将每一层内的双连通子图缩点。
 - 再“删去”层内度数小于等于2的且只与层内点相邻的节点
 - 此后，层内点数、边数不超过 $2m_2 - 1$ 。
 - 总时间复杂度： $O(n + m_1 + m_2 s)$

无穷图的桥

- 算法三（标准算法）：
 - 用并查集滚动维护两个连通性：
 - 第 k 层的层内连通性
（只考虑前 k 层层内边、前 $k-1$ 层层间边）
 - 前 $k-1$ 层为第 k 层提供的连通性
（只考虑前 $k-1$ 层层内边、前 $k-1$ 层层间边）
 - 利用“前 $k-1$ 层为第 k 层提供的连通性”求第 k 层中的桥

无穷图的桥

- 算法三（标准算法）：



无穷图的桥

- 算法三（标准算法）：
 - 随着 s 的递增，前 $s-1$ 层的子图“提供”的连通性的强度是递增的。
 - 随着 s 的递增，第 s 层中的桥单调递减
 - 即：每条边要么只在前若干层中是桥，要么在每一层中都是桥

无穷图的桥

- 算法三（标准算法）：
 - 一条边若只在前 k 层中是桥：
 - 为答案贡献 $10(1-0.9^k)d$
 - 一条边若在每一层中都是桥：
 - 为答案贡献 $10d$