# 百万富翁

于纪平 张艺缤 陈扩文

# 题意回顾

- 有 $N$ 个未知数
- 可以发送若干次请求，每次请求包括若干查询
- 每个查询给出两个下标，可以知道哪个数更大
- 需要在 $T$ 个请求和 $S$ 个查询数内找到最大值

- 测试点 1（15 分）：$N = 1000, T = 1, S = 499500$
- 测试点 2（最高 85 分）：$N = 1000000, T = 20, S = 2000000$
  - 满分需要 $T = 8, S = 1099944$

# 算法 1

- 对于测试点 1，$N = 1000, T = 1, S = 499500$
- 可以一次性发送 $C(N, 2)$ 个可能的查询，即可找到最大值

- 所有的查询都是必要的：如果某一对 $(i, j)$ 未被查询，则适应性的交互库可能将其分别设为最大值和次大值

# 算法 2

- 对于测试点 2，$N = 10^6$
- 可以每轮将所有数两两比较，较大者进入下一轮
- 得到了 $t = 20, s = 999999$ 的算法

# 算法 3

- 考虑前两个算法的优缺点
  - 平方暴力：$t$ 很小，$s$ 很大
  - 每次减半：$t$ 大，$s$ 小
- 我们可以将两个算法结合起来
  - 先做 12 轮减半，剩下 $N/2^{12} \approx 245$ 个数
  - 然后平方暴力解决
- 得到了 $t = 13, s < 1099944$ 的算法

# 算法 4

- 继续考虑两个算法的异同
  - 平方暴力：所有元素作为一组，统一询问
  - 每次减半：所有元素两两分组，分别询问每一组
- 可以统一为：将所有元素每 $k$ 个分为一组，组内分别询问
- 最优决策可以动态规划，设当前还有 $i$ 个元素和 $j$ 次请求机会：

$f(i,j)=\min_k f\left(\left\lfloor\frac{i}{k}\right\rfloor, j-1\right)+i$ 个元素每 $k$ 个分组查询的询问总数

- 得到了 $t=8, s=1099947$ 的算法
  - 最优决策为 2 2 2 2 3 6 19 183

# 算法 5

- 上述算法可能漏掉了一些方案
  - 例如，15 个元素分为 2 2 2 3 3 3，则取 $k = 2$ 或 3 都无法生成该方案
- 我们暴力一点，直接枚举分组的数目：
  $f(i,j) = \min_k f(k,j-1) + i$ 个元素分成 $k$ 组查询的询问数
- 跑得慢也没关系，可以本地算好后打表

- 得到了 $t = 8, s = 1099944$ 的算法
  - 最优决策为 500000 250000 125000 62500 20833 3472 183 1

# 最优性

- ~~出题人是这样的：选手 A 题只要构造出 1099944 的方案就可以了，可是出题人要说明最优性考虑的事情就多了。~~
- 下面我们来说明上述结果的最优性。
- **性质 1：对于最优方案，如果某次请求的结果包含了 $W_i > W_j$，则此后不应对 $j$ 再做任何查询。**
- 说明：可将后续所有对 $j$ 的查询改为对 $i$ 查询，方案不会变差。
- **性质 2（无后效性）：最优方案收到每次请求的结果之后，面临的问题与原问题的形式完全一致（即给定 $N$ 和 $T$ 最小化 $s$）。**
- 说明：由性质 1 直接推论可得。

# 最优性

- 性质 3：设交互库足够强，则第一次请求后还需要考虑的元素个数等于该请求对应的无向图的最大独立集中的顶点数。
- 说明：
- 对于足够强的交互库，其采取的策略应当为最大化该方案在本次请求后还需要考虑的元素个数。
- 为实现这一策略，交互库可找出该请求对应的无向图的最大独立集，然后令最大独立集中顶点的权值大于独立集外的顶点权值。此时下一轮还需要考虑的元素数就等于最大独立集的顶点数。
- 容易发现，交互库不存在更优的策略了。

# 最优性

- 性质 4：对于 $n$ 个点的无向图，如果其最大独立集恰好有 $k$ 个顶点，则该图能够取得边数的最小值：含有 $k$ 个连通块，每个连通块均为完全图，不同连通块的顶点数至多相差 1。
- 说明：
- 对于最大独立集恰好有 $k$ 个顶点的图，其补图的最大团恰好含有 $k$ 个顶点。
- 根据图兰定理，各部分顶点数至多相差 1 的完全 $k$ 分图能够取得最大团为 $k$ 的图的边数最大值。
- 因此，该图的补图能够取得最大独立集为 $k$ 的图的边数最小值，即为所述。

# 最优性

- 性质 5：最优方案的第一次请求对应的无向图的每个连通块必为完全图，且不同连通块的顶点数至多相差 1。
- 说明：假设不为这种情况，则可以找出最大独立集的定点数不变，但边数更小的查询图。
- 性质 6：最优方案的每一次请求对应的无向图的每个连通块必为完全图，且不同连通块的顶点数至多相差 1。
- 说明：结合性质 5 与性质 2（无后效性）可得。

- 结论：算法 5 能够找到最优方案。 □

# 最终交互库的实现

- ~~出题人只需要说明最优性就可以了，可是造题人要造出来“足够强”的交互库考虑的事情就多了~~
- 首先说明适应性评测的必要性
- 假如不是适应性的，那么我们可以……
  - 开局直接删除 100 个元素，赌它们不是答案，则查询数立减 100
  - 还有一次请求机会时（剩下 183 个元素），赌其中一个不是答案，则查询数立减 182
  - 其他大胆的随机化算法……
- 胆量越大得分越高，但运气不好时直接爆零
- 这显然是我们不希望看到的

# 最终交互库的实现

- 在最优性说明中，我们假设了交互库有能力求出最大独立集
- 然而这对于 $N = 10^6$ 的一般图来说是不可能的

- 通过仔细思考，我们发现在上述分析中，并不依赖交互库一定能找到最大独立集，而只需要在某个连通块不是完全图时找出至少含有 2 个顶点的独立集即可
- 实际的最终交互库采用了 $O(N\log N)$ 的基于顶点度数的贪心算法，能在每个连通块非完全图时确保找到至少含有 2 个顶点的独立集，并尽量扩大其顶点数

# The End