

# 《游戏》解题报告

杭州学军中学教育集团文渊中学 章弥炫

November 3, 2024

## Contents

<b>1</b>	<b>题目</b>	<b>2</b>
1.1	题目大意 . . . . .	2
1.2	数据范围 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>解题过程</b>	<b>2</b>
2.1	算法 1 . . . . .	2
2.2	算法 2 . . . . .	2
2.3	算法 3 . . . . .	3
2.4	算法 4 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>参考资料</b>	<b>3</b>

# 1 题目

## 1.1 题目大意

小 A 和小 B 在数轴上玩游戏，数轴上的一些位置放着物品，给定  $n$  个放了物品的区间，给定参数  $k$  和询问次数  $q$ ，保证  $k = 0/1$ 。

小 A 和小 B 进行  $q$  次游戏，每次游戏小 A 会选定一个位置  $x$ ，那么小 B 的位置就为  $x + k$ ，两人轮流取走物品，由小 A 先手。

对于当前操作的玩家，他会取走当前剩余物品中离自己的位置距离最近的一个物品，如果有两个物品距离相同，则他会取走位置更小的那个物品。

最后，在所有物品都被取走后，小 A 想知道，他手上的物品位置的总和是多少。

## 1.2 数据范围

保证： $1 \leq n \leq 5000$ ， $1 \leq q \leq 2 \times 10^6$ ， $1 \leq x \leq 5 \times 10^6$ ， $1 \leq l_i \leq r_i \leq 5 \times 10^6$ ， $k = 0/1$ ， $\forall i \in [1, n - 1], r_i < l_{i+1}$ 。

subtask 1 (15 分)： $q \leq 2000$ ；

subtask 2 (25 分)： $k = 0$ ；

subtask 3 (20 分)： $k = 1, l_i = r_i$ ；

subtask 4 (40 分)：无。

# 2 解题过程

## 2.1 算法 1

对于  $q \leq 2000$ ，对于每个询问，维护两个指针  $l, r$  分别表示  $< x$  和  $> x$  的所有物品中距离  $x$  最近的还没有被取走的物品。

然后每次对于一个区间，称小 A 是先手，小 B 是后手，那么按当前是先手操作还是后手操作对整个区间转移，复杂度  $O(nq)$ 。

可以通过 subtask 1，期望得分 15 分。

## 2.2 算法 2

对于  $k = 0$ ，考虑小 A 的位置从  $x$  变成  $x + 1$  时答案的变化。

称操作序列为小 A 和小 B 轮流取取走的物品形成的序列。

可以发现对于两个位置分别为  $a$  和  $b$  的物品，当  $a + b = 2x$  或  $a + b = 2x + 1$  时，在  $x$  变成  $x + 1$  的时候，两者在操作序列中的位置会发生交换。

而此时  $a$  和  $b$  哪个被先手操作也可以通过他们中间物品个数的奇偶性判断出来，因此我们处理出每一对物品  $(a, b)$  对  $a + b$  的贡献即可。

这可以枚举两个区间考虑区间之间的贡献，然后通过区间加一次函数做到复杂度  $O(n^2)$ ，单个区间内部的贡献也可以通过这种方式处理。

可以通过 subtask 2，期望得分 25 分。

## 2.3 算法 3

对于  $l_i = r_i$ ，总的物品数很少，我们考虑从  $x$  开始进行游戏的过程，两人从  $x$  开始往两边删数，假设当前  $\leq x$  的删到了  $l$ ， $> x$  的删到了  $r$ ，那么操作序列中会出现  $(l, r)$  这对二元组的  $x$  一定构成一个区间，证明可以通过归纳。

那么我们设  $f(l, r)$  表示二元组  $(l, r)$  对应的区间，然后在  $f$  数组间进行转移并累加贡献即可，复杂度  $O(n^2)$ 。

可以通过 subtask 3，期望得分 20 分。

## 2.4 算法 4

对于没有任何限制的情况，我们先考虑小  $A$  位置为  $x$  的时候怎么确定一对  $(a, b)$  在此时谁被先手取走。

令  $a < b$ ，可以发现，当  $a + b = 2x$  或  $a + b = 2x + 1$  时，谁先被取还和当前是先手操作还是后手操作有关，如果当前是先手操作，那么一定先取  $a$ ，如果当前是后手操作那么一定先取  $b$ 。

这种钦定的模式启发我们考虑  $a$  和  $b$  靠近  $x$  的连续区间的长度，能够发现操作从连续区间中最接近  $x$  的一对满足  $a + b = 2x$  或  $a + b = 2x + 1$  的位置开始钦定，一侧全都被先手取走，一侧全都被后手取走。

依旧考虑  $x$  变成  $x + 1$  时答案的变化，此时一对  $(a, b)$  的贡献就很明确了，这个贡献的正负性和贡献到的位置可以通过讨论  $a$  和  $b$  靠近  $x$  的连续区间的长度和  $a$  和  $b$  中间物品数的奇偶性来得到。

在讨论清楚后，我们得到了物品之间贡献的计算方式，而对于区间之间贡献的计算方式，和算法 2 类似，我们可以通过区间加一次函数的方式优化，复杂度  $O(n^2)$ 。

可以通过全部测试点，期望得分 100 分。

## 3 参考资料

感谢赵海鲲同学与我讨论做法。