《序列》题解报告

题目描述

已知一个序列 a 和一个初值为 0 的序列 b，你需要进行下面三种操作：

- `1 x y`：将 a_x 修改为 y。
- `2 l r`：对于所有的 $i \in [l,r]$，将 b_i 加上 $\max_{j=l}^{i} a_j$。
- `3 l r`：求 $\sum_{i=l}^{r} b_i$。

数据范围

子任务编号	$n,m \leqslant$	分值	特殊性质
1	1000	5	无
2	10^5	15	无
3	2×10^5	20	无
4	5×10^5	20	当 $op=2$ 时，$l=1$。
5	5×10^5	20	$op\neq 1$
6	5×10^5	20	无

时间限制：3s

空间限制：512MB

解题过程

算法 1

暴力模拟即可，复杂度 $O(nm)$，期望得分 5。

算法 2

考虑分块，设块长为 B。每个块中维护所有前缀最大值的位置，单点修改就暴力重构那个块。当进行操作 2 时，前后就暴力修改，中间通过二分找到分界点，打标记即可。同时需要维护每个块的 b 之和。查询就散块暴力下放标记，整块直接查询。复杂度为 $O(n\sqrt{n\log n})$，期望得分 20。

算法 3

考虑优化掉 $\log$，我们最后一起求出分界点，也就是在单点修改的时候把询问排序后运用双指针求出答案。考虑使用基数排序，一共只需要排 n 次，复杂度为 $O(n\sqrt{n})$，期望得分 40。

算法 4

考虑每次进行操作 2 时都是一个前缀。考虑离线。下标从 1 到 n 开始扫，用一颗线段树维护每个时间点的值以及历史和。修改也就是区间取 $\max$，区间历史和。复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 60。

算法 5

考虑用线段树维护 b 的值，我们定义 $\mathrm{down(rt, v, c)}$ 表示给线段树 rt 结点最代表的区间的每个位置 b_i 加上 $c \times max(v, pre_i)$。pre_i 代表 i 在这个区间的前缀最大值。

考虑分情况讨论。

如果区间长度为 1，直接返回。

如果左儿子的最大值小于等于 v。那么给左儿子的 b 加上 $v \times c$ （标记1）。同时调用 $\mathrm{down(rs, v, c)}$ 。

否则调用 $\mathrm{down(ls, v, c)}$，给右儿子的 b_i 加上 c 乘以 f_i 。f_i 表示 pre_i 和左儿子的区间最大值的最大值（标记2）。

所以 down 的复杂度为 $O(\log n)$。

考虑进行标记下放操作。标记 1 直接下放。标记 2 可以调用 $\mathrm{down}(\mathrm{rt}, mx_{rt\oplus 1}, tag2_{rt}\ )$ 进行下放。mx 表示区间最大值。所以这里复杂度为 $\log n$。注意调用 down 函数时不需要进行标记下放操作。因为并没有改变 a 的值。

操作 2 就可以拆分成 $\log$ 个 down 操作。复杂度 $O(\log^2 n)$，注意这部分并不需要进行下放操作。

操作 3 需要进行下放操作，复杂度 $O(\log^2 n)$。

所以总复杂度 $O(n\log^2 n)$，期望得分 80。

算法 6

考虑加上操作 1，维护区间最大值和区间前缀最大值的和。这部分是一个经典问题。复杂度 $O(n\log^2 n)$。注意这个部分需要修改 x 到根路径上的 mx。所以需要对这些点的兄弟进行下方操作。

这部分复杂度 $O(n\log^2 n)$，所以总复杂度 $O(n\log^2 n)$，期望得分 100。