

线段树与区间加 解题报告

题目大意

给定一个维护序列的长度为 n 的线段树，不保证左右儿子均分。线段树上每个节点维护了区间和 a_i 和懒惰标记 lz_i ，每个节点上还有 va_i, vb_i 两个权值。在这个线段树上做 m 次区间加操作，每次区间加操作后需要求出 $\left(\sum_{i=1}^{2n-1} a_i \times va_i + lz_i \times vb_i\right) \bmod 2^{32}$ 的值。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5$ 。

算法一

把题目描述中的代码补全即可。

时间复杂度 $O(nm)$ 。

期望得分 20。

算法二

设节点 i 的父亲为 fa_i ，左右儿子分界点为 i 的节点为 p_i ，对应的区间的长度为 $len_i = r_i - l_i + 1$ 。

令 $va'_i = va'_{fa_i} + va_i$ ，如果 i 为根节点则 $va'_i = va_i$ ，那么待求的式子等于

$\left[\sum_{i=1}^{2n-1} lz_i \times (len_i \times va'_i + vb_i)\right] \bmod 2^{32}$ 。这样可以统一式子的形式。再对权值做一次差分，令

$v_i = len_i \times a_i + b_i$ ， $v'_i = v_i - v_{lc_i} - v_{rc_i}$ ， $lz'_i = lz'_{fa_i} + lz_i$ ，如果 i 为根节点则 $v'_i = v_i$ ，如果 i 为根节点

则 $lz'_i = lz_i$ 。那么待求的式子就变为了 $\left(\sum_{i=1}^{2n-1} lz'_i \times v'_i\right) \bmod 2^{32}$ 。在一次区间加操作中，会使所有满足

$[l_i, r_i] \in [ql, qr]$ 的节点的 lz'_i 加上 k 并清空 p_{ql} 与 p_{qr+1} 的所有祖先（包括自身）的 lz'_i 。

考虑存在一个线段树上的节点对应的区间为 $[ql, qr]$ 的情况，那么 lz'_i 增加的范围是一个子树，清空的范围是一条链，可以用重链剖分+线段树解决，其中线段树维护了 v'_i 的和与 $v'_i \times lz'_i$ 的和。当然你也可以使用全局平衡二叉树维护，不过对于给定的数据范围没有必要。

时间复杂度 $O(m \log n \sim m \log^2 n)$ 。

期望得分 20。

算法三

让我们考虑更一般的情况。

修改操作中 lz'_i 清空的范围是两条部分相交的链，但增加的范围比较复杂。设 p_{ql} 与 p_{qr+1} 的最近公共祖先是 x ，那么 lz'_i 增加的范围是 x 到 p_{ql} 的链（不包含 x ）的右边的子树加上 x 到 p_{qr+1} 的链（不包含 x ）的左边的子树。这个范围显然没法用普通的重链剖分来表示，但是我们可以对重链剖分做一些改造。在求 dfn 序的时候先完整遍历当前的重链，再依次遍历在当前重链左侧的子树，最后依次遍历在当前重链右侧的子树，这样我们就可以用 $O(\log n)$ 个区间表示增加的范围。更具体地说，是 $O(\log n)$ 个重链片段一侧的子树，和 $O(\log n)$ 个单独的子

树，一个单独的子树又可以用从子树根到叶子的重链，重链左侧的子树和重链右侧的子树这 3 个区间表示。和算法三一样我们使用线段树维护答案。

时间复杂度 $O(m \log^2 n)$ 。

期望得分 100。

算法四

其实我们也可以用全局平衡二叉树维护信息。

因为树是二叉树，所以可以在每个节点记录轻儿子的编号和轻儿子是左儿子还是右儿子。每个节点需要维护 v'_i 的值，子树中 v'_i 的和与 $v'_i \times lz'_i$ 的和。为了维护这些信息，每个节点还要维护当前重链，当前重链的左轻儿子子树，当前重链的右轻儿子子树的 lz'_i 增加的值的懒惰标记。

时间复杂度 $O(m \log n)$ 。

期望得分 100。

算法五

让我们舍弃前面的差分，考虑直接求 $\left(\sum_{i=1}^{2n-1} lz_i \times v_i \right) \bmod 2^{32}$ 。发现一次修改操作影响到的范围是两个相交的毛毛虫（一条链加上与链直接相连的节点），可以考虑使用类似毛毛虫剖分的方式来维护信息。因为本题背景的特殊性，我们可以不用显式地进行毛毛虫剖分，而是在重链上维护重链上的 lz_i 还未加到轻儿子的 lz_i 上的值，等到需要使用轻儿子的 lz_i 的值的时候再去更新。显然这些操作可以用线段树维护，同样也可以使用全局平衡二叉树维护。

时间复杂度 $O(m \log n \sim m \log^2 n)$ 。

期望得分 100。

鸣谢

感谢学长 @Jerry3128 在出题过程中提供的帮助。

参考资料

<https://www.luogu.com.cn/article/fgppcx5b>